Text prednášky na konferencii SFZ – 18. október 2017, Smolenice

Autor: Róbert Maco

Názov príspevku: **Sú matematické vety pravdivé?**

Jedným spôsobom ako odpovedať na túto otázku by bolo položiť protiotázku: *Ktoré* matematické vety? Diskusia by sa potom mohla uberať smerom k vzájomnému ujasňovaniu si, čo všetko vlastne myslíme pod slovným spojením „matematická veta". Určitú oprávnenosť takejto protiotázky možno vidieť v tom, že rozsah pojmu *matematickej vety* sa líši v závislosti od rôznych filozofických alebo matematicko-metodologických východísk. Môžeme sa napr. sporiť o tom, či vety (druhorádovej) logiky patria do matematiky, t. j. či sú to *v podstate* matematické vety.[1] Alebo si môžeme spomenúť na to, že aj v súčasnosti existuje skupina matematikov (a filozofov), ktorí odmietajú (významnú) časť súčasnej „štandardnej" (klasickej) matematiky. Vety, ktoré patria do tejto oblasti, sú podľa nich skôr nepodložené metafyzické špekulácie.

Keďže však zmyslom tohto príspevku nie je púšťať sa do rozličných podobných pohraničných sporov, chcem hneď od začiatku túto úvahu obmedziť na tú časť matematiky, ktorá je predmetom všeobecného konsenzu medzi matematikmi a filozofmi matematiky – alebo prinajmenšom *natoľko* širokého konsenzu, že výnimky z tohto pravidla nie sú relevantné. Keď sa teda pýtam na pravdivosť matematických viet, mám na mysli prípady takých viet, ako sú napr. nasledujúce štyri, vybrané z elementárnej matematiky:

π je iracionálne číslo[2]. (1)

91 nie je prvočíslo[3]. (2)

Ťažnice[4] každého (euklidovského) trojuholníka sa pretínajú v pomere 1 : 3. (3)

Každá n-prvková množina má 2^n podmnožín[5]. (4)

Ak sa teraz pozrieme na tieto vety a tiež na nespočetne veľa rovnako nekontroverzných matematických viet z vyššej aj „nižšej" matematiky, mohlo by sa ľahko zdať, že pôvodný problém je *ipso facto* vlastne vyriešený. Či som práve nepovedal, že všetky tieto vety sú všeobecne prijímané, nekontroverzné atď.? Nehovorí sa tým inými slovami, že sú pravdivé?

Samozrejme, tento krok vyzerá na prvý pohľad priveľmi unáhlený. Opatrný prístup nám radí rešpektovať lekcie, ktoré v sebe obsahuje mohutná tradícia filozofického skepticizmu: to, že nejaké tvrdenia sú prijímané (dokonca ak aj – plus-mínus – všeobecne), ešte nemusí znamenať, že sú aj pravdivé. Iba ak by sme a priori predpokladali čosi ako „konsenzuálnu teóriu pravdy", ktorá sama sa však už určite ani zďaleka neteší všeobecnému konsenzu.

Motiváciou pre tento príspevok však nie je môj skepticizmus ohľadne pravdivosti matematických viet. A už vôbec sa na tomto mieste nechcem zaoberať úvahami vychádzajúcimi z nejakého bezbrehého skepticizmu, ktorý by sa usiloval hľadať nejaké *možné* dôvody pochybovania už len preto, aby si ako typ myslenia uchoval svoj *raison d´être*.

---

[1] Je ***matematická** logika* v tomto ohľade analogická ***matematickej** fyzike* alebo ***matematickej** lingvistike*?

[2] Reálne číslo je iracionálne práve vtedy, ak sa nedá vyjadriť ako pomer celých čísel.

[3] Prvočíslo je prirodzené číslo väčšie ako 1, ktoré je bezo zvyšku deliteľné len jednotkou a sebou samým.

[4] Ťažnica je úsečka, ktorej jedným koncovým bodom je stred nejakej strany trojuholníka a druhým je protiľahlý vrchol toho istého trojuholníka.

[5] X je podmnožinou množiny M práve vtedy, ak všetky prvky množiny X sú prvkami množiny M.

Bezprostrednou pohnútkou pre sformulovanie otázky uvedenej v nadpise bol fakt, že v súčasnej filozofii matematiky sa sformoval istý myšlienkový prúd, ktorý obvykle vystupuje pod názvom „fikcionalizmus“ a ktorý odpovedá na spomínanú otázku záporne. Filozofi hlásiaci sa k tomuto spôsobu myslenia nepopierajú pravdivosť matematických viet preto, že by nerešpektovali matematiku ako významnú a prakticky nepostrádateľnú disciplínu. Robia tak skôr na základe jednoduchej nominalisticky inšpirovanej úvahy: ak abstraktné objekty reálne neexistujú, tak potom matematické vety, ktoré (priamo či nepriamo) tvrdia existenciu nejakých abstraktných objektov a pripisujú im rôzne vlastnosti a vzťahy, nie sú pravdivé. Pretože veci sa nemajú tak, ako to dané matematické vety hovoria. Ak napr. (1) tvrdí, že existuje číslo π a toto číslo má vlastnosť byť iracionálnym, tak potom takáto veta zrejme môže byť pravdivá len vtedy, ak toto číslo naozaj existuje.

Z hľadiská bežného chápania (*common sense*) pôsobí takýto argument veľmi podozrivo, ak nie úplne absurdne. A to určite nie z toho dôvodu, že by bežný človek zobraný z ulice bol odhodlaným zástancom matematického realizmu (ako antitézy k nominalizmu).

Mali by sme teda v prvom rade priblížiť dôvody, ktoré osobitne v posledných zhruba dvoch dekádach priviedli mnohých známych filozofov matematiky do tábora fikcionalizmu. Tak ako to zrejme platí o všetkých izmoch v rámci filozofie, aj tu treba hneď od začiatku povedať, že fikcionalizmus nie je úplne homogénny smer, v literatúre existujú viaceré odlišné varianty matematického fikcionalizmu, pričom rozdiely nie sú celkom zanedbateľné. V tomto texte však budem vychádzať z takej definície fikcionalizmu, ktorá je prijímaná väčšinou filozofov matematiky, resp. na ktorú sa väčšina z nich odvoláva, keď chce hovoriť (či už pozitívne alebo negatívne) o fikcionalizme.

Fikcionalizmus sa zameriava hlavne na riešenie tých filozofických problémov matematiky, ktoré sa týkajú sémantickej, epistemologickej a ontologickej stránky matematiky (napr. „na čo referujeme pomocou matematických viet?“, „majú matematické vety pravdivostné hodnoty?“, „ako je možné matematické poznanie?“, „existujú matematické objekty?“). Bez priveľkého zjednodušenia ho možno chápať ako pokus vyhnúť sa dvom tradičným extrémnych filozofickým pozíciám ohľadne matematiky, ktorými sú platonizmus a nominalizmus (resp. formalizmus), ale takým spôsobom, že pri tomto vyhýbacom manévri zachováme plauzibilné časti oboch spomenutých izmov a vyhneme sa len tým sporným, resp. ťažko obhájiteľným.

Čo je žiaduce ponechať si z nominalistického prístupu? **Po prvé**, zdá sa, že nominalizmus má triezvejší pohľad v otázke existencie „abstraktných objektov“ – nominalizmus odmieta „zmnožovať súcna“ a okrem mentálnych, fyzických a „kultúrnych“ entít prijímať ešte existenciu nečasových a nepriestorových, kauzálne inertných, no pritom nemenných a „večných“ matematických objektov. Tento ekonomický prístup v ontológii následne dáva, **po druhé**, nominalistovi výhodu, pokiaľ ide o epistemologické otázky možnosti matematického poznania. Postulovanie nejakej osobitej „matematickej intuície“ (či iné sofistikovanejšie, no takisto sporné návrhy) na vysvetlenie tejto možnosti sa stávajú zbytočné.

Čo je na druhej strane lákavé na platonistickom prístupe? Po prvé, zdá sa, že platonizmus je silný v otázke sémantiky matematických viet. Podľa tohto prístupu je správne brať matematické vety doslova, t. j. ak napr. veta (1) hovorí niečo o niečom, čiže presnejšie, ak s nejakým podmetom („π“) spája prísudok „je iracionálne“, tak by sme to mali brať rovnako doslovne, ako keď v bežnej reči vyslovujeme súd, že napr. „Trump je iracionálny“, alebo keď v rámci prírodných vied tvrdíme, že „tento plyn je ionizovaný“. Pokiaľ nemáme veľmi dobré dôvody spochybniť doslovnosť matematických viet, mali by sme ich a ich pravdivostné podmienky brať rovnako vážne ako v prípade posledných dvoch spomenutých výrokov. Nakoniec, zdá sa, že praktizujúci matematici – teda tí, ktorí o matematike vedia najviac – chápu matematické výroky práve takto, a netrávia čas tým, že by sa ich snažili preformulovať do podoby, ktorá by bola „vecne adekvátnejšia“. A po druhé, toto doslovné čítanie matematických viet následne platonistom dáva do rúk tromf v podobe možnosti formulovať jednotnú sémantiku pre matematické a nematematické vety, čo sa zdá byť osobitne výhodné hlavne v prípadoch, kedy je matematický diskurz úzko (ba možno dokonca neoddeliteľne) prepletený s nematematickým, napr. pri formuláciách fyzikálnych zákonov apod.

Na prvý pohľad by sa zdalo, že nominalistický a platonistický prístup sú natoľko protichodné, že selektívne vyberať isté prvky z oboch a myslieť si, že dohromady to dá koherentnú pozíciu, je beznádejné (je čírou fikciou). Fikcionalizmus je však práve pokus o takúto stratégiu. Stručne zhrnuté, fikcionalizmus plne sympatizuje s nominalizmom v spomenutých dvoch bodoch, no zároveň priznáva oprávnenosť platonistických výhrad voči nominalizmu, pokiaľ ide o riešenie sémantických otázok. Povedané z opačnej strany: fikcionalista súhlasí s platonistom, že matematické vety treba čítať doslovne a taktiež v tom, že „jednotná sémantika" je *desideratum*, za ktoré sa oplatí filozoficky zabojovať, no zároveň nedôveruje mytológii „abstraktných objektov" a v otázke existencie matematických objektov je jednoznačne na strane nominalistu.

Ako dôsledok tohto (na pohľad) problematického zlaďovania platonistickej a nominalistickej stratégie prichádza do hry prvok fikcionality. Podľa fikcionalistu matematická veta (1) chce hovoriť o tom, že istému objektu prináleží istá vlastnosť, no keďže tento objekt v skutočnosti neexistuje, daná veta nemôže byť pravdivá – podobne ako veta „Ostrov, ktorý som si dnes kúpil, leží v južnom Pacifiku", takisto kvôli chybnej existenčnej presupozícii.

V dôsledku toho je pre fikcionalistu veľká časť bežne prijímaných matematických viet nepravdivá. (Samozrejme, niektoré matematické vety aj fikcionalista uznáva ako pravdivé, napr. „Najväčšie prvočíslo neexistuje").

Ako som naznačil už vyššie, z toho, že fikcionalista upiera pravdivosť mnohým matematickým vetám, netreba v žiadnom prípade vyvodzovať záver, že tým chce matematike samej odopierať alebo čo i len znižovať nárok na relevantnosť v rámci nášho celkového poznania. Pre fikcionalistu neexistuje nijaké nevyhnutné spojenie medzi nepravdivosťou a kognitívnou (či praktickou) neužitočnosťou. Matematika môže zostať nepostrádateľným nástrojom pri poznávaním sveta a pri orientovaní sa vo svete, aj keď jej veľká časť je nepravdivá. Ak by sme chceli, mohli by sme to vyjadriť aj tak, že spomínané matematické vety sú „pravdivé" v rámci matematického sveta, podobne ako by sme mohli povedať, že v rámci sveta slovenských rozprávok je pravdou, že niektorí draci chrlia oheň. V súlade s tým niektorí fikcionalisti explicitne pripodobňujú matematické vety k fikcionálnemu diskurzu v rámci beletrie, iní sa však takýmto analógiám dôsledne vyhýbajú (keďže sa – celkom oprávnene – obávajú, že takého analogizovanie by mohlo kvôli ďalším podstatným odlišnostiam priniesť fikcionalistickú pozíciu viac problémov pre než úžitku).

Po tomto stručnom predstavení základnej myšlienky matematického fikcionalizmu prejdem teraz k jeho kritickému zhodnoteniu. Chcem vopred upozorniť, že sa pritom sústredím len na jeden aspekt fikcionalizmu, a to na tézu o nepravdivosti (niektorých) matematických viet. Moja kritika teda bude relevantná len to tej miery, do akej je otázka pravdivosti ústrednou témou rôznych fikcionalistických koncepcií.

Prečo je vôbec potrebné vyrovnávať sa s matematickým fikcionalizmom a vyjadrovať sa k nemu? Moje vlastné motivácie sú nasledovné: rovnako ako fikcionalisti, ani ja nepokladám platonizmus za správny spôsob uvažovania vo filozofii matematiky. Ak by som bol nútený zaškatuľkovať svoj obľúbený prístup vo filozofii matematiky, označil by som ho zhruba ako nominalistický alebo formalistický. Na druhej strane nie som, opäť podobne ako fikcionalisti, uzrozumený s mnohými sémanticko-filozofickými stratégiami nominalistov. Nominalisti zvyčajne pokladajú za svoju povinnosť potvrdiť svoju tézu o nesprávnosti doslovného čítania matematických viet takou analýzou matematického diskurzu, na konci ktorej budú nominalistické reformulácie, resp. parafrázy pôvodných matematických viet, ktoré už nebudú ani len v náznaku zvádzať k doslovnému čítaniu, no zároveň budú vyjadrovať presne ten istý matematický obsah čo pôvodné znenie. Ako jednoduchý príklad toho, o čo tu ide, sa s obľubou zvykne uvádzať tento typ viet:

„Priemerný Slovák vlastní 0,84 mobilných telefónov.“ (5)

Ak by niekto čítal túto vetu rovnako doslovne ako napr. vetu „Najvyšší Slovák vlastní dva mobily“, dostal by sa, samozrejme, k veľmi chybným záverom. To, že takúto chybu bežne nerobíme, plynie z toho, že si viac či menej jasne uvedomujeme, že veta (5) nie je (napriek povrchovej podobnosti) relačná veta formy „*x* sa má spôsobom ***R*** k takému a takému množstvu/počtu *y*“ (kde *x, y* sú premenné žiadajúce si výrazy pre osoby, resp. pojmy a ***R*** je vzťah vlastnenia), ale že sa ňou skôr chce povedať:

„Ak vydelíme počet mobilov vlastnených Slovákmi počtom Slovákov, dostaneme číslo 0,84“, (6)

alebo jednoducho

„$M_S/S = 0{,}84$“ (M_S je počet mobilov vlastnených Slovákmi, S je počet Slovákov). (7)

Podľa mnohých matematických nominalistov treba podobným spôsobom preformulovať aj matematické vety, resp. vety, ktoré obsahujú matematické výrazy predstierajúce referovanie na nejaké „abstraktné objekty“. Keďže veta (7) obsahuje aj po úspešnom zahnaní prízrakov „priemerného Slováka“ a „fragmentárneho mobilu“ ešte stále číslice (domnele) referujúce na čísla ako matematické „abstraktné objekty“, mohli by sme nominalistický prístup demonštrovať priamo na tomto príklade tým, že by sme túto vety preformulovali do podoby, ktorý nás už nebude „systematicky zavádzať“ (Ryle) smerom k matematickému platonizmu.

Tu však treba povedať, že ani jeden spomedzi rôznych nominalistických návrhov na parafrázovanie viet či už čistej alebo aplikovanej matematiky ani zďaleka nezískal širokú podporu ani v rámci samotných nominalistických kruhov. A koniec koncov, prevažná časť nominalistov zostala skôr pri programových vyhláseniach, či nanajvýš pri niekoľkých rudimentárnych príkladoch. Ak by sme mali súdiť podľa doterajších úspechov „parafrázujúceho nominalizmu“, museli by sme urobiť záver, že táto nominalistická stratégia je podobne úspešná ako rôzne typy platonistických teórií abstraktných objektov. Jediné, čo by nám potom zostalo, by bol pocit, že nominalistický spôsob uvažovania aspoň „feels like right“, zatiaľ čo ten platonistický naopak – čo je však skôr už len iné vyjadrenie nášho vlastného filozofického prednastavenia.

Ak teda mám veľké výhrady k platonizmu a napriek sympatiám k nominalizmu pokladám ich „nominalizačné“ procedúry za neadekvátne, či dokonca za kontraproduktívne, nie je to minimálne jeden dobrý dôvod pripojiť sa k v súčasnosti už pomerne širokému prúdu matematických fikcionalistov?

Pokúsim sa vysvetliť, prečo nepokladám fikcionalistický spôsob uvažovania za dobrú voľbu, pokiaľ ide o spomenuté otázky, a to najmä o otázku pravdy, resp. pravdivosti matematických viet. Svojím negatívnym postojom nechcem popierať určité čiastkové pozitívne prínosy matematických fikcionalistov do súčasných diskusií vo filozofii matematiky. Chcem len upozorniť na nedostatočnosť tohto izmu ako globálnej stratégie.

Ujasnime si najskôr, čo vlastne robí fikcionalista, keď vyhlasuje, že mnohé z matematických viet sú nepravdivé, resp. že sú *stricto sensu* nepravdivé. V prvom rade chcem poukázať na to, že takéto vyhlásenie ide proti naším jazykovým zvyklostiam. V bežnom matematickom diskurze alebo aj v každodennom živote nemáme problém hovoriť o vetách, ako sú napr. (1), (2), ako o pravdivých. Niektorí sú naopak náchylní hovoriť o matematických vetách ako o „absolútne pravdivých“, „nevyhnutne pravdivých“, či „pravdivých vo všetkých možných svetoch“. Samozrejme, hlavne tie posledné dve charakterizácie v sebe už zvyčajne obsahujú bohaté filozofické predpoklady, ktoré budú často úzko spriaznené s platonistickým postojom v ontológii, a keďže fikcionalizmus je namierený proti platonistickej ontológii, takáto pripomienka nie je na tomto mieste v argumentácii proti fikcionalizmu relevantná. Preto sa teraz chcem skôr pridŕžať bežného mimofilozofického jazykového úzu. A tu musíme uznať, že ani medzi matematikmi ani medzi inými ľuďmi hovoriacimi o matematike nebadať zdržanlivosť pri používaní termínu „pravdivý“. V nábehoch k filozofovaniu sa občas vyskytne aj spojenie „absolútna pravdivosť“, ktorým sa chce zdôrazniť, že matematické pravdy sú v nejakom zmysle podstatne pevnejšie (a trvanlivejšie) než povedzme vety iných vied (dokonca aj v porovnaní s tzv. „exaktnými“ prírodnými vedami).

Prečo však vôbec spomínam bežné hovorenie o matematike? Prečo by to malo byť relevantné v súvislosti s explicitne *filozofickou* tézou, ako je fikcionalizmus? Koniec koncov, nech už sa o matematických vetách bežne hovorí, ako chce, je predsa práve úlohou filozofov matematiky prejsť od možno naivných (alebo slabo domyslených) výrokov k filozoficky zrelším a argumentačne mnohonásobne podopretých názorom.

Samozrejme, moja zmienka o bežnom hovorení nemá za cieľ nastoliť nejakú tyraniu „prirodzeného jazyka“, teda niečo v tom zmysle, ako sa kedysi vyčítalo stúpencom *ordinary language philosophy*, že filozofické problémy delegujú pred tribunál bežného jazyka (*lingua vulgaris*), čím ich vlastne a priori deklasujú. Moja pripomienka mala za cieľ priviesť nám k nasledujúcej otázke: Pokiaľ je to tak, že fikcionalisti sa odkláňajú od bežného jazykového úzu, robia tak preto, lebo sú v spore s tým, čo bežne o matematických vetách hovoríme, t. j. preto, lebo chcú opraviť naše bežné predstavy o pravdivosti matematických viet, alebo je to skôr tak, že pojem pravdivosti, ktorý majú na mysli fikcionalisti, sa odlišuje od toho, ktorý majú ľudia na mysli v bežných nefilozofických konverzáciách? Ak by to bolo tak, ako naznačuje tá druhá možnosť, potom by sme počínanie fikcionalistu mohli presnejšie charakterizovať tak, že vlastne predkladá istý návrh na zmenené používanie slova „pravdivý“, pričom tvrdí, že ak prijmeme tento jeho návrh, potom sa nám (mnohé) vety matematiky ukážu *v tomto zmysle* ako nepravdivé.

Prečo je táto otázka dôležitá? Opäť by sa mohlo zdať, že takto presúvať svoju avizovanú kritiku fikcionalizmu na pôdu, ktorá je samému fikcionalistovi cudzia, a teda, že sa moja očakávaná kritika bude míňať cieľa. Nie je to nakoniec tak, že fikcionalistovi v zásade vôbec nezáleží na tom, ako sa ľudia bežne mimo filozofie bavia o pravdivosti či nepravdivosti matematických viet, ale ide mu skôr o obhájenie svojej filozofickej pozície na pôde filozofických debát, a to osobitne v konfrontácii s rôznymi platonistickými a nominalistickými koncepciami?

S tým súhlasím, ale zároveň podotýkam: cieľom filozofie matematiky by zrejme malo byť v prvom rade lepšie porozumenie matematike (v najrozličnejších ohľadoch). Cieľom by nemalo byť generovanie takých otázok a problémov, ktorými sa filozofi matematiky takpovediac odpoja od matematickej praxe (v širokom zmysle tohto slova), aby si medzi sebou navzájom riešili spory, ktoré zasahujú budovu matematiky iba ako tiene. Je preto v prvom rade dôležité pozrieť sa, aké konkrétne problémy sú dotknuté fikcionalistickými tézami, a to bez ohľadu na to, či je „problém pravdy“ jedným z „ústredných problémov“ tradičnej filozofie matematiky, ako sa zvykne písať v úvodoch do filozofie matematiky a pod. Je totiž možné, že problém pravdy, resp. pravdivosti matematických viet nebol plodne postavený už ani v predchádzajúcich filozofických potýčkach medzi platonizmom a nominalizmom, do ktorých následne vstúpil fikcionalizmus ako nová konkurenčná pozícia s ambíciou zodpovedať práve tie otázky, okolo ktorých sa dovtedy viedli bezvýsledné spory medzi platonistami a nominalistami (rôznych odtieňov).

Navrhujem preto položiť kritickú otázku smerom k fikcionalizmu takto: Čo konkrétne sa dosiahne pre lepšie porozumenie matematiky prostredníctvom fikcionalistickej tézy o nepravdivosti mnohých viet matematiky v porovnaní s tým, ako bežne hovoríme o pravdivosti či nepravdivosti matematických viet? Zoberme si ako príklad vetu (1) o čísle π alebo vetu (2) o čísle 91. O týchto vetách bežne povieme, že sú pravdivé. Čo tým chceme povedať? Niekto by možno tautologicky odpovedal, že to, že jednoducho *platia*. Čo keby sme však na takéhoto nič netušiaceho nešťastníka tlačili ďalej? Čo sa tým chce povedať, že platia? Najbližšia nekruhová odpoveď by zrejme bola, že platia v tom zmysle, že sú dokázané, resp. že kedykoľvek si môžem prejsť ich dôkazy a tak sa o nich ubezpečiť.

Tu by nám do toho mohol vpadnúť fikcionalista s námietkou, že takéto „vysvetlenie“ pravdivosti je naivné, pretože, po prvé, môžeme predsa poznať matematické vety, ktoré sú pravdivé, no nie sú (zatiaľ dokázané), a po druhé, takéto vysvetlenie sa nedá aplikovať na úplne prvé premisy matematických dôkazov, pretože tie nie sú „z princípu" dokázateľné. Týmto by nám mohol chcieť dať najavo, že naše bežné predstavy o pravde matematických viet sú nekoherentné a nesystematické, takže je najvyšší čas odobrať sa po podloženejšie a seriózne názory do profesionálnej filozofie matematiky, a to, pravdaže, najlepšie do fikcionalistického tábora. Skúsme ho však ešte chvíľku trápiť a ponechajme si ešte na okamih otvorenú možnosť, že si vystačíme s naším hrubým bežným chápaním pravdivosti v matematike.

Určite treba uznať, že naše bežné chápanie pravdivosti vo vzťahu k matematickým vetám je nesystematické, pretože mu určite nepredchádzalo postupné preverovanie rôznych prípadov alebo dokonca testovanie rôznych možností, myšlienkových experimentov atď. A možno sa na niektorých miestach ukáže aj ako nekoherentné. Otázka však je, či je toto všetko jednoznačne nedostatok. Pozrime sa preto ešte raz na vyššie spomenuté námietky fikcionalistu (ktorý v tomto, samozrejme, len opakuje štandardné ťahy filozofie matematiky, ktoré sa osvojujú už v prvých týždňoch kurzov filozofie matematiky pre začiatočníkov).

Je možné stotožniť pravdivosť matematických viet s ich dokázanosťou. Uznáme, že nie, že táto reakcia bola príliš unáhlená. I my chceme zachovať rozdiel medzi dokázaným a pravdivým, lebo ak niekedy v budúcnosti dokážeme nejakú matematickú domnienku, chceme mať otvorenú možnosť vyjadrovať sa tak, že táto domnienka bola pravdivá, hoci sme o tom nevedeli (lebo sme vtedy ešte nemali jej dôkaz). Nebudeme teda zaiste hovoriť, že bola dokázaná predtým, než bola dokázaná, ale iba že bola pravdivá aj predtým, než bola dokázaná.

Ak sa teda opäť spýtame nášho bežného respondenta, čo mieni tým, že nejaká vety typu (1), (2), (3), (4) je pravdivá, mohol by odpovedať, že to, že je dokázateľná v rámci nejakej matematickej teórie. Ak to aplikujeme na otvorené otázky matematiky, napr. na vetu „$e + \pi$ je iracionálne číslo" alebo na slávnu Riemannovu hypotézu, môžeme povedať, že naše prípadné očakávanie, že sú pravdivé znamená toľko, že sú dokázateľná v rámci príslušných teórií.

Ako ďaleko sa však dá zájsť s takýmto na pohľad veľmi hrubým chápaním matematickej pravdivosti. Nestroskotáme hneď na ďalšej prekážke, ktorá spomenul náš fikcionalista? Ako to bude s pravdivosťou axióm alebo postulátov príslušných teórií? Tu už predsa nemôžeme tvrdiť, že pod ich *pravdivosťou* mienime ich *dokázateľnosť*. Samozrejme, na istý čas môžeme problém presúvať – ak sme napr. vetu (2) dokazovali v rámci Peanovej aritmetiky, jej postuláty môžeme následne označiť za pravdivé v tom zmysle, že sú dokázateľné v rámci ZFC[6]. Otázka si však na nás počká v teórii množín: Je napr. axióma nekonečna pravdivá[7], a ak áno, čo tým vlastne myslíme?

Aké možnosti tu máme s naším hrubým bežným chápaním? Mohli by sme napr. povedať, že táto axióma (spolu s ostatnými štandardnými axiómami) je pravdivá v tom zmysle, že je matematickou komunitou široko prijímaná, nakoľko spĺňa to, čo od viet tohto druhu očakávame. Naše modifikované objasnenie slova „pravdivý" v súvislosti s matematickými vetami by bolo mohlo znieť, že pravdivé sú tie vety, ktoré sú dokázateľné v rámci príslušných matematických teórií alebo ktoré tvoria axiomatickú bázu štandardne prijímaný matematiky.

Samozrejme, takéto vysvetlenie by fikcionalistu a ani väčšinu iných profesionálnych filozofov matematiky neuspokojilo. Námietky by sa prihrnuli v celých húfoch. Aby sme si predstavili aspoň jednu veľmi štandardnú, spomenieme ako ilustratívny príklad slávnu Cantorovu „hypotézu kontinua" (CH =

[6] Zermelova-Fraenkelova teória množín, najpoužívanejšia štandardná axiomatická teória množín predložená najprv Ernstom Zermelom v roku 1908 a neskôr modifikovaná a doplnená Abrahamom Fraenkelom v rokoch 1921 a 1922.

[7] Axióma nekonečna sa dá formulovať viacerými spôsobmi. Neformálne vzaté hovorí, že *existuje aspoň jedna nekonečná množina*. Detailnejšie sa dá vyjadriť napr. ako tvrdenie, že existuje aspoň jedna množina, ktorá obsahuje prázdnu množinu a ktorá zároveň ku každej množine m, ktorú obsahuje, obsahuje aj jednoprvkovú množinu obsahujúcu m, t. j. $\{m\}$. (Axióma VII pôvodnej Zermelovej teórie množín z roku 1908)

continuum hypothesis)[8]. Keďže ide o negovanú existenčnú vetu, o ktorej je dokázané, že ani ona ani jej negácia nie je odvoditeľná zo štandardných axióm teórie množín, ponúka sa otázka, ako by si s jej pravdivostným statusom poradilo naše bežné chápanie. Platonista i fikcionalista majú v tejto veci úplne jasno: prvý ju pokladá za buď pravdivú alebo nepravdivú, s dôvetkom, že asi zatiaľ nevieme (a s bolestnou možnosťou, že sa ani nikdy nedozvieme), zatiaľ čo druhý ju jednoznačne pokladá za pravdivú (keďže vypovedá o neexistencii istej množiny, t. j. istého abstraktného objektu).

Máme dôvod cítiť sa zle s naším „bežným chápaním", keď ide o otázky tohto druhu. Nemyslím si to. Keď už na to príde, takého vety môžeme pokojne nechať „mimo pravdy a nepravdy". Ak sa v budúcnosti ukáže, že naše štandardné axiómy teórie množín (alebo nejakej inej fundamentálnej teórie) sa so všeobecným súhlasom matematikov rozšíria o nejaké iné takým spôsobom, že CH bude teorémou takto rozšírenej teórie, budeme ju pokladať za pravdivú. Môže sa však udiať i to, že nič také sa nikdy nestane a CH navždy zostane matematickým bezdomovcom bez strechy pravdivostnej hodnoty.

V čom je naše riešenie menej hodnotné než spomenuté riešenia zo strany platonistu a fikcionalistu? Ani jeden z nich evidentne nijako neprispel k pokroku v rámci samotnej matematiky: ak fikcionalista hovorí, že CH je pravdivá, hovorí to bez ohľadu na čokoľvek, čo sa v budúcnosti v matematike v tejto veci dokáže. Tak isto platonista – pre neho má daná veta jednoznačne stanovenú hodnotu, nezávislú od ničoho čo sa kedy môže udiať v dejinách univerza. Predstavme si takýto scenár: na veľké prekvapenie matematikov a iných zainteresovaných pozorovateľov sa v roku 2020 ukáže, že dôkaz, ktorý predložil v roku 1963 Paul Cohen bol chybný a teda, že CH nakoniec predsa len je teorémou ZFC. Je zrejmé, čo sa udeje na pôde filozofickej reflexie v táboroch platonistov a fikcionalistov. Platonista sa poteší, že sa konečne odhalila pravdivostný hodnota CH a fikcionalista bude naďalej trvať na jej pravdivosti. Obaja by sa mohli tešiť z toho, že ich filozofické názory sa potvrdili, pravda, keby to nebolo tak, že ich filozofické názory v tejto veci išli úplne pomimo matematickej praxe (alebo ako spomenutý tieň, aby som zostal pri predošlej metafore).

Preto si myslím, že filozofické chápanie pravdivosti vo vzťahu k matematickým vetám treba držať bližšie k reálnej matematickej praxi a tým aj k reálnemu spôsobu hovorenia v rámci tejto praxe. To, že takýto spôsob hovorenia nie je exaktný, že nie je systematický a že z času na čas môže naraziť na svoje hranice z hľadiska svojej koherentnosti, to nie sú jednoznačné negatíva. Takými by boli, keby popri takomto chápaní existovala taká filozofická teória pravdy, ktorá by bola exaktná, systematická, vnútorne koherentná a ktorý by zároveň bola v živom kontakte s reálnou matematikou a jej aplikáciami.

[8] Ide o matematickú hypotézu týkajúcu sa veľkosti nekonečných množín, ktorú formuloval a neúspešne sa snažil dokázať už zakladateľ teórie množín Georg Cantor v roku 1878. Hypotéza kontinua figurovala na prvom mieste na slávnom Hilbertovom zozname 23 najdôležitejších nevyriešených matematických problémov z roku 1900. Hypotéza kontinua znie: Neexistuje množina, ktorej mohutnosť je striktne väčšia než mohutnosť množiny prirodzených čísel a striktne menšia než mohutnosť množiny reálnych čísel („kontinua").